Berufskolleg Marienschule Lippstadt
Schule der Sekundarstufe II mit gymnasialer Oberstufe
- staatlich anerkannt -

Schuljahr 2013/2014
Kurs: Mathematik AHR 12.1
Kurslehrer: Gödde / Langenbach

Skript
zur Bestimmung ganzrationaler Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften (Steckbriefaufgaben)

Inhalt

1. Allgemeine Einführung

Anders als bei der Kurvendiskussion, in der ausgehend von der Funktionsgleichung die verschiedenen markanten Punkte des dazugehörigen Funktionsgraphen berechnet wurden, ist hier der Gedankengang genau umgekehrt. Einzelne (spezielle) Punkte bzw.

Eigenschaften eines Funktionsgraphen sind gegeben.

Gesucht wird nun die Funktionsgleichung derjenigen Funktion, die diese Vorgaben erfüllt.

Dabei läuft die Bestimmung der Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion *n*-ten Grades immer nach demselben Schema ab: Aus vorgegebenen Angaben und Eigenschaften werden verschiedene Bedingungen erstellt, denen die gesuchte Funktion genügen soll. Soll die gesuchte Funktion bzw. Funktionsgleichung eindeutig bestimmt sein, müssen dies so viele sein, wie Koeffizienten im Funktionsterm vorkommen. Somit sind das bei einer ganzrationalen Funktion *n*-ten Grades $n+1$ Bedingungen. Aus diesen Bedingungen erstellen wir dann ein lineares Gleichungssystem mit genau $n+1$ Gleichungen.

Dabei wendet man folgendes Verfahren an:

1. Man geht von der allgemeinen Funktionsgleichung
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$$
für ganzrationale Funktionen aus und bildet die erste und zweite Ableitung von *f*.

2. Sind beide Koordinaten eines Punktes gegeben, so werden sie in $f(x)$ eingesetzt.

3. Informationen über Steigungen und Extremstellen werden in $f'(x)$ eingesetzt.

4. Informationen über die Wendepunkte werden in $f''(x)$ eingesetzt.

Dabei ist es ist zweckmäßig, immer zuerst die Gleichungen aufzustellen, die sich durch das Einsetzen des Argumentes 0 ergeben, weil diese unmittelbar zur Angabe von Koeffizienten führen.

1. Übersetzungshilfen für den Ansatz von Steckbriefaufgaben

Sollen die Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften ermittelt werden, so muss der Aufgabentext genau interpretiert werden, da die Angaben zur Aufstellung der notwendigen Gleichungen oft „verschleiert“ sind. Deshalb sollen nun zuerst ein paar Formulierungen erläutert werden. Wer allerdings bei der Kurvendiskussion keine Probleme hatte, sollte versuchen, ohne diese Erläuterungen bei verschiedenen Aufgaben am Ende dieses Abschnittes zum Ziel zu kommen. Bei Problemen sollten die Übersetzungshilfen (→ Tab. 1) oder die Beispielsübersetzungen (→ Tab.2) hinzugezogen werden.

Tab.1: Übersetzungshilfen für Steckbriefaufgaben

Angabe im Text	mathematische Interpretation
Der Graph der Funktion verläuft symmetrisch zur $f(x)$-Achse.	Alle Koeffizienten ungerader *x*-Potenzen sind 0. Die Funktionsgleichung enthält nur Potenzen mit geraden Exponenten und a_0.
Der Graph der Funktion *f* verläuft durch den Punkt $P(a/b)$	Der Punkt liegt auf dem Graphen von *f*, also gilt $f(a)=b$.
Der Graph der Funktion *f* hat an der Stelle x_0 ein Extremum.	Es liegt ein Maximum bzw. Minimum an der Stelle x_0 vor. Das bedeutet $f'(x_0)=0$.
Die Funktion *f* hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.	An der Stelle x_0 ist $f''(x_0)=0$.
Die Funktion *f* hat in x_0 einen Sattelpunkt.	An der Stelle x_0 gilt $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)=0$.
Der Graph der Funktion *f* hat an der Stelle x_0 die Steigung *m*; $m \in IR$.	An der Stelle x_0 gilt $f'(x_0)=m$.
Die Gerade *g* mit $g(x)=mx+b$ berührt den Graphen der Funktion *f* an der Stelle x_0.	Die Gerade ist die Tangente an den Graphen von *f*. Es gilt $f'(x_0)=m$ und $g(x_0)=mx_0+b$.
Der Graph der Funktion *f* berührt an der Stelle x_0 die *x*-Achse.	Der Punkt $P(x_0/0)$ liegt auf dem Graphen von *f*, d. h. der Graph hat dort eine Nullstelle und der Graph von *f* hat bei x_0 die gleiche Steigung wie die *x*-Achse. Es ist also $f(x_0)=0$ und $f'(x_0)=0$.

Erfahrungsgemäß haben viele Schüler Probleme mit der Übersetzung der Textangaben in das zu lösende Gleichungssystem. Daher geben wir in Tab.2 weitere Übersetzungsbeispiele an, bei denen aus den Angaben im Text die jeweiligen *Bedingungsgleichungen* abgeleitet werden.

Diese Bedingungsgleichungen führen über das Einsetzen in die jeweiligen allgemeinen Funktionsgleichungen der Funktion *f* bzw. der ersten oder zweiten Ableitung von *f* (f' bzw. f'') zu den *Bestimmungsgleichungen*, aus denen schließlich das zu lösende Gleichungssystem gebildet wird.

Setzen wir die Lösungen des Gleichungssystems dann wieder in die allgemeine Funktionsgleichung von *f* ein, so erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung.

2. Beispiele zur Erstellung der Bedingungsgleichung und der Bestimmungsgleichung

Um die Indizierung der Koeffizienten zu vermeiden, werden wir für die folgenden Beispiele (→ Tab.2) die Koeffizienten *a* bis *d* benutzen. Somit ist *f* hier stets eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit der allgemeinen Funktionsgleichung

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,.$$

Demnach ist dann

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

bzw.

$$f''(x) = 6ax + 2b\,.$$

Die jeweilige Bedingungsgleichung ergibt sich aus der Übersetzung der Angaben im Text.

Die Bestimmungsgleichung erhalten wir, indem wir die *x*-Koordinate der Bedingungsgleichung in die zugehörige Funktionsgleichung der Funktion *f* bzw. der zugehörigen ersten oder zweiten Ableitung einsetzen und gleich der *y*-Koordinate aus der Bedingungsgleichung setzen.

Die folgende Tabelle verdeutlicht noch einmal das Gemeinte und demonstriert in einer ersten Weise die Übersetzung der Angaben im Text in eine Bestimmungsgleichung.

Tab.2: Beispiele zur Erstellung der Bedingungsgleichung und der Bestimmungsgleichung

Angabe im Text	Bedingungsgleichung	Bestimmungsgleichung
verläuft durch den Punkt $P(2/6)$	$f(2)=6$	$f(2)=a\cdot(2)^3+b\cdot(2)^2+c\cdot 2+d=6$ *also* $8a+4b+2c+d=6$
hat eine Nullstelle bei $x=9$	$f(9)=0$	$f(9)=a\cdot(9)^3+b\cdot(9)^2+c\cdot 9+d=0$ *also* $729a+81b+9c+d=0$
schneidet die y-Achse bei 3	$f(0)=3$	$f(0)=a\cdot(0)^3+b\cdot(0)^2+c\cdot 0+d=3$ *also* $d=3$
schneidet die Gerade mit $f(x)=3x-7$ auf der y-Achse	$f(0)=-7$	$f(0)=a\cdot(0)^3+b\cdot(0)^2+c\cdot 0+d=-7$ *also* $d=-7$
berührt die x-Achse an der Stelle $x=5$	$f(5)=0$ $f'(5)=0$	$f(5)=a\cdot(5)^3+b\cdot(5)^2+c\cdot 5+d=0$ *also* $125a+25b+5c+d=0$ $f'(5)=3a\cdot(5)^2+2b\cdot 5+c=0$ *also* $75a+10b+c=0$
hat einen Tiefpunkt bei $T(2/-7)$	$f(2)=-7$ und $f'(2)=0$	$f(2)=a\cdot(2)^3+b\cdot(2)^2+c\cdot 2+d=-7$ *also* $8a+4b+2c+d=-7$ $f'(2)=3a\cdot(2)^2+2b\cdot 2+c=0$ *also* $12a+4b+c=0$
hat einen Wendepunkt bei $P(-1/2)$	$f(-1)=2$ und $f''(-1)=0$	$f(-1)=a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(1)+d=2$ *also* $-a+b-c+d=2$ $f''(-1)=6a\cdot(-1)+2b=0$ *also* $-6a+2b=0$
besitzt in $P(2/-3)$ die Steigung 4	$f(2)=-3$ und $f'(2)=4$	$f(2)=a\cdot(2)^3+b\cdot(2)^2+c\cdot 2+d=-3$ *also* $8a+4b+2c+d=-3$ $f'(2)=3a\cdot(2)^2+2b\cdot 2+c=4$ *also* $12a+4b+c=4$

die Tangente in $P(-1/5)$ ist parallel zur Geraden $f(x)=6x$	$f(-1)=5$ und $f'(-1)=6$	$f(-1)=a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d=5$ *also* $-a+b-c+d=5$ $f'(-1)=3a\cdot(-1)^2+2b\cdot(-1)+c=6$ *also* $3a-2b+c=6$

Zum Abschluss unserer bisherigen Überlegungen führen wir nun drei Beispiele einer vollständigen Bestimmung der gesuchten Funktion *f* an. Dabei werden wir im ersten Beispiel noch einmal die zu Beginn des Kapitels benutzten indizierten Koeffizienten a_3, a_2, a_1 und a_0 verwenden, in den anderen beiden Beispielen werden dann die Koeffizienten *a* bis *e* bzw. *a* bis *d* benutzt.

3. Lösung von Linearen Gleichungssystemen (LGS) mittels Gauß'schem Algorithmus

Der Algorithmus von Gauß, auch das gauß´sche Eliminationsverfahren oder einfach Gauß-Verfahren genannt, ist ein wichtiges Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen. Es beruht darauf, dass Äquivalenzumformungen die Lösung eines Gleichungssystems nicht verändern.

Ziel des Verfahrens ist es das Gleichungssystem auf eine „Dreiecksform“ oder „Diagonalform“ zu bringen, an der die Lösung leicht ermittelt bzw. die Lösungsmenge abgelesen werden kann.

Durch Addition von Gleichungen in denen jeweils dieselbe Variable die gleichen Koeffizienten – allerdings mit entgegen gesetztem Vorzeichen – besitzt, wird aus diesen Gleichungen eine bestimmte Variable eliminiert.

Definition (Gauß'scher Algorithmus)

Die wiederholte Anwendung des Additionsverfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems heißt *Gauß'scher Algorithmus*, benannt nach dem deutschen Mathematiker Karl Friedrich Gauß (1777-1855).

Beispiel:

<u>Elimination von c in Zeile 2 und Zeile 3:</u>

$$\left|\begin{array}{l} 4a+2b+c=8 \\ a+b+c=2 \\ a-b+c=-4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit (-1).
Dort erhält man – c, das bei der Addition mit + c zu Null wird.

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ a+b+c=2 \\ a-b+c=-4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ Z_2+Z_1 \\ Z_3+Z_1 \end{array}$$

Wir halten die erste Gleichung fest.
Durch Addition der ersten Gleichung zur zweiten und dritten erhalten wir in der zweiten und dritten Zeile Gleichungen ohne c.

<u>Elimination von b:</u>

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ -3a-b=-6 \\ -3a-3b=-12 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ \\ \end{array}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit (-3), so dass das b in der zweiten Zeile und in der dritten Zeile die gleichen Koeffizienten mit verschiedenem Vorzeichen erhält (-3 und +3).

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ 9a+3b=18 \\ -3a-3b=-12 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ Z_3+Z_2 \end{array}$$

Wir addieren die zweite Gleichung zur dritten Gleichung. Damit erhalten wir eine Gleichung, in der nur noch a vorkommt.

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ 9a+3b=18 \\ 6a=6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{2}{3} \\ \cdot(-1) \end{array}$$

In der zweiten Gleichung soll nun die Variable a eliminiert werden. Das a soll dazu in der zweiten und in der dritten Zeile den selben Koeffizienten erhalten.

Die dritte Zeile wird benutzt, damit keine neuen Variablen in der zweiten Zeile dazukommen.

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ 6a+2b=12 \\ -6a=-6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ Z_2+Z_3 \\ \\ \end{array}$$

Addiert man die dritte Gleichung zur zweiten, fällt in der zweiten Gleichung das a weg.

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ 2b=6 \\ -6a=-6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \end{array}$$

Nun müssen noch aus der ersten Gleichung das a und das b eliminiert werden. Dazu müssen die Koeffizienten gleichnamig gemacht werden.

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ 2b=6 \\ 4a=4 \end{array}\right|$$

Wir addieren nun die zweite und die dritte Gleichung zur ersten.

$$\left|\begin{array}{l} -c=2 \\ 2b=6 \\ 4a=4 \end{array}\right| \begin{array}{l} :(-1) \\ :(2) \\ :(4) \end{array}$$

Durch die Vereinfachung aller Gleichungen mittels Division durch die vorhandenen Koeffizienten werden alle Variablen bestimmt.

$$\left|\begin{array}{l} c=-2 \\ b=3 \\ a=1 \end{array}\right|$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet also:

$$IL=\{(1/3/-2)\}.$$

Alternativ wäre denkbar, bei Kenntnis eines Koeffizienten, das obige Schema zu verlassen und auf ein anderes Verfahren zurückzugreifen. Zur Veranschaulichung greifen wir noch einmal auf ein Zwischenergebnis zurück:

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ 9a+3b=18 \\ 6a=6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ :6 \end{array}$$

Durch Äquivalenzumformung erhalten wir schon hier unseren ersten Koeffizienten a.

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ 9\cdot(1)+3b=18 \\ a=1 \end{array}\right|$$

Wir setzen nun a = 1 in die zweite Gleichung ein.

Dort ist dann nur noch die Variable b enthalten, die dann mittels Äquivalenzumformung bestimmt werden kann.

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ 9+3b=18 \\ a=1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ -9 \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ 3b=9 \\ a=1 \end{array}\right| :3$$

$$\left|\begin{array}{l} -4a-2b-c=-8 \\ b=3 \\ a=1 \end{array}\right|$$

Nun setzen wir a = 1 und b = 3 in die erste Zeile ein, um dort die Variable c zu bestimmen.

$$\left|\begin{array}{l} -4\cdot(1)-2\cdot(3)-c=-8 \\ b=3 \\ a=1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} -4\ -6\ -c=-8 \\ b=3 \\ a=1 \end{array}\right| +10$$

(-4 un d -6 ergeben zusammen -10.)

$$\left|\begin{array}{l} -c=2 \\ b=3 \\ a=1 \end{array}\right| \cdot(-1)$$

$$\left|\begin{array}{l} c=-2 \\ b=3 \\ a=1 \end{array}\right|$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet demnach:

$IL=\{\,(1/3/-2)\,\}$.

4. Beispiele für vollständige Steckbriefaufgaben

Beispiel (Steckbriefaufgabe 1)

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades besitzt

- im Punkt $P_1(1/3)$ die Steigung 3.
- Im Punkt $P_2(0/4)$ liegt ein Wendepunkt.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Lösung:

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, d. h. die allgemeine Funktionsgleichung genügt der Gleichung:

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$\Rightarrow f'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$$

$$\Rightarrow f''(x)=6a_3x+2a_2$$

Zur Bestimmung der Funktionsgleichung benötigen wir aufgrund der vier unbekannten Koeffizienten

$$a_0;\ a_1;\ a_2;\ a_3$$

vier Gleichungen.

Diese erhalten wir durch folgende Überlegungen:

Tab.3: Herleitung der Bestimmungsgleichungen zur Steckbriefaufgabe 1

Angabe im Text	Bedingungsgleichung	Bestimmungsgleichung
Der Punkt $P_1(1/3)$ liegt auf dem Graphen von *f*.	$f(1)=3$	$a_3(1)^3+a_2(1)^2+a_1(1)+a_0=3$ $\Leftrightarrow\ a_3+a_2+a_1+a_0=3$
Im Punkt $P_1(1/3)$ besitzt der Graph die Steigung 3.	$f'(1)=3$	$3a_3(1)^2+2a_2(1)+a_1=3$ $\Leftrightarrow\ 3a_3+2a_2+a_1=3$
Der Punkt $P_2(0/4)$ liegt auf dem Graphen von *f*.	$f(0)=4$	$a_0=4$
Im Punkt $P_2(0/4)$ liegt ein Wendepunkt.	$f''(0)=0$	$6a_3(0)+2a_2=0 \Leftrightarrow 2a_2=0 \Leftrightarrow a_2=0$

Nun werden wir das zugehörige Gleichungssystem lösen:

$$\left| \begin{array}{c} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 3 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 3 \\ a_0 = 4 \\ a_2 = 0 \end{array} \right| \qquad \text{einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} a_3 + a_1 + 4 = 3 \\ 3a_3 + a_1 = 3 \\ a_0 = 4 \\ a_2 = 0 \end{array} \right| \qquad Z_2 - Z_1$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} a_3 + a_1 + 4 = 3 \\ 2a_3 - 4 = 0 \\ a_0 = 4 \\ a_2 = 0 \end{array} \right| \qquad a_3 \text{ bestimmen}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} a_3 + a_1 + 4 = 3 \\ a_3 = 2 \\ a_0 = 4 \\ a_2 = 0 \end{array} \right| \qquad a_3 \text{ einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 2 + a_1 + 4 = 3 \\ a_3 = 2 \\ a_0 = 4 \\ a_2 = 0 \end{array} \right| \qquad a_1 \text{ bestimmen}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} a_1 = -3 \\ a_3 = 2 \\ a_0 = 4 \\ a_2 = 0 \end{array} \right|$$

Nach Einsetzen der berechneten Koeffizienten in die allgemeine Ausgangsgleichung $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ erhalten wir folgende Funktionsgleichung als Lösung:

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 4$$

Beispiel (Steckbriefaufgabe 2)

Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen ganzrationalen Funktion vierten Grades, die

- durch die Punkte $P_1(-1/-16)$ und
- $P_2(4/96)$ verläuft und zudem
- in $N(0/0)$ ein (relatives) Extremum und
- bei $x = 3$ die Steigung 36 besitzt.

Lösung:

Es gilt für ganzrationale Funktionen vierten Grades:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Auf Grund der im Aufgabentext vorgegebenen Eigenschaften von *f* gilt:

Tab.4: Herleitung der Bestimmungsgleichungen zur Steckbriefaufgabe 2

Angabe im Text	Bedingungsgleichung	Bestimmungsgleichung
Nullpunkt $(0/0)$	$f(0) = 0$	$f(0) = a(0)^4 + b(0)^3 + c(0)^2 + d(0) + e = 0$ $\Rightarrow\ e = 0$
Extremum bei $(0/0)$	$f'(0) = 0$	$f'(0) = 4a(0)^3 + 3b(0)^2 + 2c(0) + d = 0$ $\Rightarrow\ d = 0$
verläuft durch den Punkt $P_1(-1/16)$	$f(-1) = 16$	$f(-1) = a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + d(-1) + e = 16$ $\Rightarrow\ a - b + c = 16$
verläuft durch den Punkt $P_2(4/96)$	$f(4) = 96$	$f(4) = a(4)^4 + b(4)^3 + c(4)^2 + d(4) + e = 96$ $\Rightarrow\ 256a + 64b + 16c = 96$
bei $x = 3$ die Steigung 36	$f'(3) = 36$	$f'(3) = 4a(3)^3 + 3b(3)^2 + 2c(3) + d = 36$ $\Rightarrow\ 108a + 27b + 6c = 36$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ d &= 0 \\ a - b + c &= 16 \\ 256a + 64b + 16c &= 96 \\ 108a + 27b + 6c &= 36\,. \end{aligned}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem wie folgt:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a - b + c = 16 \\ 256a + 64b + 16c = 96 \\ 108a + 27b + 6c = 36 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(-48) \\ \cdot 3 \\ \cdot 8 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -48a + 48b - 48c = -768 \\ 768a + 192b + 48c = 288 \\ 864a + 216b + 48c = 288 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ +Z_1 \\ +Z_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -48a + 48b - 48c = -768 \\ 720a + 240b = -480 \\ 816a + 264b = -480 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \cdot(-264) \\ \cdot 240 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -48a + 48b - 48c = -768 \\ -190080a - 63360b = 126720 \\ 195840a + 63360b = -115200 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ Z_3 + Z_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -48a + 48b - 48c = -768 \\ 720a + 240b = -480 \\ 5760a = 11520 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ :5760 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

a einsetzen in Z_2:

$$\begin{array}{lll} & 720 \cdot 2 + 240b = -480 & |-1440 \\ \Leftrightarrow & 240b = -1920 & |:240 \\ \Leftrightarrow & b = -8 & \end{array}$$

a und b einsetzen in Z_1:

$$\begin{array}{lll} & -48 \cdot 2 + 48 \cdot (-8) - 48c = -768 & \\ \Leftrightarrow & -96 - 384 - 48c = -768 & |+480 \\ \Leftrightarrow & -48c = -288 & |:(-48) \\ \Leftrightarrow & c = 6 & \end{array}$$

Durch das Einsetzen von *a*, *b* und *c* in die Ausgangsgleichung

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung:

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 6x^2\,.$$

Beispiel (Steckbriefaufgabe 3)

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades besitzt im Punkt $P_1(-1/10)$ einen Hochpunkt und im Punkt $P_2(1/-6)$ einen Wendepunkt.

Es gilt für ganzrationale Funktionen dritten Grades

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b\,. \end{aligned}$$

Auf Grund der im Aufgabentext vorgegebenen Eigenschaften von *f* gilt:

Tab.5: Herleitung der Bestimmungsgleichungen zur Steckbriefaufgabe 3

Angabe im Text	Bedingungsgleichung	Bestimmungsgleichung
im Punkt $P_1(-1/10)$	$f(-1) = 10$	$f(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 10$ $\Rightarrow -a + b - c + d = 10$
im Punkt $P_2(1/-6)$	$f(1) = -6$	$f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = -6$ $\Rightarrow a + b + c + d = -6$
im Punkt $P_1(-1/10)$ einen Hochpunkt	$f'(-1) = 0$	$f'(-1) = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0$ $\Rightarrow 3a - 2b + c = 0$
im Punkt $P_2(1/-6)$ einen Wendepunkt	$f''(1) = 0$	$f''(1) = 6a \cdot (1) + 2b = 0$ $\Rightarrow 6a + 2b = 0$

Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} -a+b-c+d=10 \\ a+b+c+d=-6 \\ 3a-2b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

Dieses lösen wir wie folgt:

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -a+b-c+d=10 \\ -a-b-c-d=6 \\ 3a-2b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ Z_2+Z_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -a+b-c+d=10 \\ -2a-2c=16 \\ 3a-2b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ :2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -a+b-c+d=10 \\ -a-c=8 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+b=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ Z_2+Z_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -a+b-c+d=10 \\ 2a-2b=8 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+b=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -a+b-c+d=10 \\ 2a-2b=8 \\ 3a-2b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z_4+Z_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -a+b-c+d=10 \\ 2a-2b=8 \\ 3a-2b+c=0 \\ 8a=8 \end{array} \right|$$

Somit besteht die Möglichkeit a zu berechnen:

$$\Rightarrow 8a=8 \quad |:8$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{a=1}}$$

$a=1$ einsetzen in Z_2:

$$\Rightarrow 2\cdot 1-2b=8 \quad |-2$$
$$\Leftrightarrow -2b=6 \quad |:(-2)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{b=-3}}$$

$a=1$ und $b=-3$ einsetzen in Z_3:

$$\Rightarrow 3\cdot 1-2\cdot(-3)+c=0$$
$$\Leftrightarrow 3+6+c=0 \quad |-9$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{c=-9}}$$

$a=1$, $b=-3$ und $c=-9$ einsetzen in Z_1:

$$\Rightarrow -1+(-3)-(-9)+d=10$$
$$\Leftrightarrow -1-3+9+d=10$$
$$\Leftrightarrow 5+d=10 \quad |-5$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{d=5}}$$

Durch das Einsetzen von a, b, c und d in die Gleichung $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung:

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+5.$$

5. Übungsaufgaben zur Bestimmung ganzrationaler Funktionen

1. Geben Sie alle Bedingungsgleichungen und alle Bestimmungsgleichungen für die in den folgenden Aufgaben gesuchten Funktionen an. Geben Sie zunächst die benötigten allgemeinen Funktionsgleichungen an:

   a) Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph im Ursprung ein Minimum und in $A(2/1)$ ein Maximum hat.

   b) Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Graph in $P(-2/3)$ die Steigung $m = \frac{1}{2}$ besitzt und in $W(1{,}5/-4)$ die Gerade $t(x) = -2x + 7$ als Wendetangente besitzt.

   c) Welches zum Ursprung symmetrische Polynom 3. Grades hat in $P(1/1)$ ein Maximum?

   d) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades besitzt im Punkt $W(2/14)$ eine Wendetangente mit der Steigung 15 und eine Nullstelle bei $x = 1$. Welche Funktion erfüllt diese Bedingungen?

2. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades besitzt im Punkt $W(2/14)$ eine Wendetangente mit der Steigung 15 und eine Nullstelle bei $x = 1$.
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
   (Hinweis: Lösung: $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 3x - 8$.)

3. Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen ganzrationalen Funktion dritten Grades, die durch den Nullpunkt und den Punkt $P_1(2/-60)$ verläuft, bei $x_1 = -3$ eine Nullstelle hat und bei $x_2 = \frac{1}{3}$ eine Wendestelle besitzt.
   (Hinweis: Die Lösung ist $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x$.)